Teorema di Dilworth attraverso la Compattezza semantica

Premettiamo alcune definizioni:

- Dato un insieme parzialmente ordinato $(P, \leq)$, definiamo $C \subseteq P$ una *catena* di P se per ogni $a, b \in C$ vale una tra $a \leq b$ e $b \leq a$ (ossia se ogni coppia di elementi di C è comparabile).
- Dato un insieme parzialmente ordinato $(P, \leq)$, definiamo $A \subseteq P$ una *anticatena* di P se per ogni $a, b \in A$ non vale alcuna tra $a \leq b$ e $b \leq a$ (ossia se ogni coppia di elementi di C è incomparabile).
- Un insieme parzialmente ordinato $(P, \leq)$ si dice *k-catenato* se estistono $C_1, ..., C_k$ catene di P (eventualmente vuote) tali che $P = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$.
- Definiamo $J_k = \{1; 2; ...; k\}$.

Consideriamo sul linguaggio $\mathcal{L} = \{X_{a,b} \colon a, b \in P\} \cup \{X_a^i \colon a \in P,\ i \in J_k\}$ la seguente teoria $T_{(P,\leq),k}$:

$$\begin{cases} X_{a,b} \text{ per ogni } a, b \text{ in } P \text{ tali che } a \leq b \\ \bigvee_{i=1}^{k} X_a^i \text{ per ogni } a \text{ in } P \text{ e per ogni } i \text{ in } J_k \\ (X_a^i \wedge X_b^i) \to (X_{a,b} \vee X_{b,a}) \text{ per ogni } a, b \text{ in } P \text{ e per ogni } i \text{ in } J_k \end{cases} \tag{1}$$

La nostra idea è associare alle catene in cui vogliamo partizionare lo spazio un numero, e associare ad ogni elemento il numero corrispondente alla catena di cui fa parte. Partiamo con la seguente

Proposizione 1. *Un insieme parzialmente ordinato* $(P, \leq)$ *è k-catenato se e soltanto se la teoria* $T_{(P,\leq),k}$ *è soddisfacibile.*

Proof. Supponiamo dapprima che $(P, \leq)$ sia k-catenato, ossia $C = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$. Consideriamo la seguente interpretazione I:

$$I(X_{a,b}) = V \Leftrightarrow a \leq b$$

$$I(X_a^i) = V \Leftrightarrow a \in C_i$$

Dalla definizione di *catena* si deduce che I è un modello di $T_{(P,\leq),k}$. Il viceversa è sostanzialmente identico. Sia I un modello di $T_{(P,\leq),k}$ e si considerino gli insiemi C_i dati da:

$$C_i = \{a \in P \colon I(X_a^i) = V\}.$$

Questi ultimi rappresentano una divisione di P in k catene.

□

In questa trattazione diamo per buono il seguente risultato:

Proposizione 2. *Sia* $(P, \leq)$ *un insieme parzialmente ordinato finito. Allora* P *è* k*-catenato se e soltanto se ogni anticatena ha cardinalità al più* k*.*

Siamo ora pronti per enunciare e dimostrare il seguente

Teorema 1 (Dilworth)**.** *Sia* $(P, \leq)$ *un insieme parzialmente ordinato. Allora* P *è* k*-catenato se e soltanto se ogni anticatena ha cardinalità al più* k*.*

Proof. Una delle due frecce segue immediatamente dalla definizione: se infatti P è k-catenato, il principio dei cassetti implica che non possano esistere anticatene di cardinalità maggiore di k.

Procediamo a dimostrare l'altra freccia. Grazie alla *proposizione 1*, ci basta dimostrare che la teoria $T_{(P,\leq),k}$ è soddisfacibile. Sia T_0 una sottoteoria di $T_{(P,\leq),k}$. consideriamo l'insieme

$$S = \{a \in P \colon a \text{ compare come indice in una qualsiasi variabile di } T_0\}$$

Su S considero l'ordinamento indotto da P. Considero ora $T_{(S,\leq_{|S}),k}$. Si ha $T_0 \subseteq T_{(S,\leq_{|S}),k}$, infatti se $X_{a,b} \in T_0$ allora si ha $a \leq b$, ma allora (poiché sia a che b stanno in S) $a \leq_{|S} b$. Ma allora $X_{a,b} \in T_{(S,\leq_{|S}),k}$. Per le altre formule il contenimento è evidente dalla definizione di S.

Ma S è un insieme finito, e in esso non possono esistere anticatene di cardinalità maggiore di k: infatti se esistessero le coppie di elementi sarebbero incomparabili anche in P, il che sarebbe assurdo per ipotesi.

Su S posso applicare la *proposizione 2*, che mi assicura (grazie di nuovo alla *proposizione 1*) che la teoria $T_{(S,\leq_{|S}),k}$ è soddisfacibile. Ma poiché $T_0 \subseteq T_{(S,\leq_{|S}),k}$, allora anche T_0 è soddisfacibile.

Grazie all'arbitrarietà di T_0, applicando il *Teorema di compattezza semantico* otteniamo la tesi.

□

Ludovico Battista

Esercizi di logica

Ludovico Battista

1. Esercizio 1.18;

   La prima implicazione è falsa. Basta considerare le formule

   $$\mathcal{A} = (A \vee \neg A)$$

   $$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$$

   $$\mathcal{B}_1 = B$$

   Evidentemente $\mathcal{A}$ è una tautologia, ma $\mathcal{A}(\mathcal{A}_1/\mathcal{B}_1) = B$ è falsa in una qualsiasi interpretazioe I in cui B è falsa.

   L'altra implicazione invece è banalmente vera. Siano infatti $\mathcal{B}_i = \mathcal{A}_i$. Per ipotesi $\mathcal{A}(\mathcal{A}_i/\mathcal{B}_i)$ è una tautologia, ma è facile verificare per induzione che si ha $\mathcal{A}(\mathcal{A}_i/\mathcal{B}_i) = \mathcal{A}$. E dunque $\mathcal{A}$ è tautologia.

   Si noti che non è stata usata una delle ipotesi.

2. Esercizio 1.24;

   Nelle ipotesi dell'esercizio la tesi è falsa. Basta considerare le formule

   $$\mathcal{A} = A \vee \neg A; \quad \mathcal{B} = B \leftrightarrow B$$

   Dal momento che sono entrambe tautologie, $\mathcal{A}$ è logicamente equivalente a $\mathcal{B}$. Ma $\mathcal{A}^*$ non è logicamente equivalente a $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$

   L'esercizio diventa vero se in $\mathcal{A}$ e in $\mathcal{B}$ compaiono soltanto $\neg$, $\vee$, $\wedge$. Ma dobbiamo anteporre la soluzione del seguente esercizio, di cui useremo non soltanto l'enunciato, ma anche il metodo con cui si procede alla dimostrazione.

3. Esercizio 1.30;

   Ci limiteremo al caso DNF, per il caso CNF la dimostrazione è assolutamente la stessa a patto di scambiare $\vee$ con $\wedge$ ed ogni "esiste" con "per ogni".

   Dimostreremo la tesi per induzione sulla lunghezza della formula.

   Procediamo ora alla dimostrazione. Il passo base è ovvio (abbiamo solo letterali). Per il passo induttivo:

(a) $\mathcal{A} = \neg\mathcal{B}$.

Per ipotesi induttiva $\mathcal{B} \equiv \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j})$, dove $L_{i,j}$ sono letterali.

Ci chiediamo quando $\mathcal{B}$ è vera. Ciò vale se e solo se esiste un i per cui, per ogni $1 \leq h \leq m_i$, $L_{i,h}$ è vera. Ossia se e solo se in ogni insieme della forma $\{L_{1,h_1}; L_{2,h_2}; \ldots; L_{n,h_n}\}$ (dove $1 \leq h_i \leq m_i$) c'è almeno un letterale vero.

Per vederla in un altro modo, $\mathcal{B}$ è falsa se e solo se esiste un insieme della forma $\{L_{1,h_1}; L_{2,h_2}; \ldots; L_{n,h_n}\}$ che contiene solo letterali falsi, e dunque se esiste una formula del tipo

$$\neg L_{1,h_1} \wedge \neg L_{2,h_2} \ldots \wedge \neg L_{n,h_n}$$

vera. Notiamo che queste formule sono congiunzioni di letterali ($\neg L$ è letterale) e indicizziamo queste formule F_λ su un indice $\lambda \in \Lambda$.

Dunque vale l'equivalenza

$$\neg\mathcal{B} \equiv \bigvee_{\lambda \in \lambda} F_\lambda$$

(b) $\mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$

Ogni dimostrazione ha il suo passo facile, ed anche stavolta una delle verifiche si rivela particolarmente semplice. Basta infatti applicare l'ipotesi induttiva e ottenere la tesi.

(c) $\mathcal{A} = \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$

Possiamo utilizzare la seguente equivalenza:

$$(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \equiv \neg(\neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})) \equiv \neg(\neg\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{C})$$

E adesso basta applicare il punto (a) (a $\neg\mathcal{B}$ ed a $\neg\mathcal{C}$), il punto (b) e ancora il punto (a) per ottenere la tesi.

(d) $\mathcal{A} = \mathcal{B} \leftrightarrow \mathcal{C}$ e $\mathcal{A} = \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$

Basta ricordare le equivalenze

$$\mathcal{A} \leftrightarrow \mathcal{B} \equiv (\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B})$$

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$$

E si procede applicando i punti precedenti.

4. Esercizio 1.24; seconda parte

Notiamo innanzitutto che basta mostrare una freccia, infatti $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$, dunque $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}^* \equiv \mathcal{B}^* \Rightarrow \mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Consideriamo ora, data $\mathcal{A}$ una formula, la formula DNF *così come costruita nell'esercizio 1.30* a lei elementarmente equivalente; sia questa $F_{\mathcal{A}}$. Allo stesso modo a $\mathcal{B}$ associamo $F_{\mathcal{B}}$.

Per costruzione (basta controllare in che modo abbiamo costruito $F_{\mathcal{A}}$ e $F_{\mathcal{B}}$) valgono le seguenti equivalenze [1]:

$$\mathcal{A} \equiv F_{\mathcal{A}} \equiv F_{\mathcal{B}} \equiv \mathcal{B}$$
$$\mathcal{A}^* \equiv (F_{\mathcal{A}})^*$$
$$\mathcal{B}^* \equiv (F_{\mathcal{B}})^*$$

Ci basta dunque mostrare che per ogni coppia $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ di formule DNF vale

$$\mathcal{A} \equiv \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A}^* \equiv \mathcal{B}^*$$

e avremo concluso. Ci scusiamo in anticipo per il numero di indici che utilizzeremo nel resto dell'esercizio.

Siano $\mathcal{A} = \bigvee_{i=1}^{n}(\bigwedge_{j=1}^{m_i} L_{i,j})$ e $\mathcal{B} = \bigvee_{r=1}^{l}(\bigwedge_{s=1}^{p_r} M_{r,s})$.

Procediamo per assurdo: senza perdita di generalità possiamo supporre che esista I interpretazione tale che $I(\mathcal{A}^*) = V$ ma $I(\mathcal{B}^*) = F$.

Ricordiamo cosa vuol dire che $I(\mathcal{A}^*) = V$: $\mathcal{A}^* = \bigwedge_{i=1}^{n}(\bigvee_{j=1}^{m_i} L_{i,j})$ è vera in I se e soltanto se esiste un insieme della forma $\{L_{1,h_1}; \ldots; L_{n,h_n}\}$ tale che $I(L_{g,h_g}) = V$ per ogni $1 \leq g \leq n$. Dunque, poiché $I(\mathcal{B}^*) = F$, si ha che per ogni insieme $\{M_{1,k_1}; \ldots; M_{l,k_l}\}$ esiste un g tale che $I(M_{g,k_g}) = F$.

Consideriamo ora l'interpretazione $\bar{I}$ che definiamo sulle variabili in questo modo: $\bar{I}(X) = F$ se $I(X) = V$, e $\bar{I}(X) = V$ se $I(X) = F$. Si noti che questa caratteristica passa ai letterali.

Ma allora l'interpretazione $\bar{I}$ mi fornisce un esempio in cui esiste un insieme della forma $\{L_{1,h_1}; \ldots; L_{n,h_n}\}$ che contiene tutti letterali falsi (e dunque, sempre per la caratterizzazione evidenziata nell'esercizio precedente) $\bar{I}(\mathcal{A}) = F$, ma anche tale che in ogni insieme della forma $\{M_{1,k_1}; \ldots; M_{l,k_l}\}$ c'è almeno un letterale vero, e dunque $\bar{I}(\mathcal{B}) = V$. Ma allora ho trovato un'interpretazione che distingue $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, contro l'ipotesi.

[1] è qui che usiamo il fatto che in $\mathcal{A}$ e in $\mathcal{B}$ non compaiono $\leftrightarrow$ e $\rightarrow$, infatti in quei casi $(F_{\mathcal{A}})^*$ non risulta elementarmente equivalente a $F_{\mathcal{A}^*}$

Esercizi di logica

Ludovico Battista

1. *La teoria dei campi archimedei non è formalizzabile al primo ordine.*

   Procediamo per assurdo. Ipotizziamo di avere una teoria T_{arch} tale che $\mathcal{M}$ è modello di T_{arch} se e soltanto se $\mathcal{M}$ è campo archimedeo. Consideriamo allora un linguaggio $\mathcal{L}^*$ tale che $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{c_1; c_2\}$ e una teoria

   $$T = T_{arch} \cup \{c_1 > 0\} \cup \{c_2 > c_1\} \cup \{c_2 > c_1 + c_1\} \cup \ldots \cup \{c_2 > c_1 + \ldots + c_1\} \cup \ldots$$

   La teoria T è finitamente soddisfacibile. Infatti comunque sia data $T_0 \subseteq T$ finita, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

   $$T_0 \subseteq T_{arch} \cup \{c_1 > 0\} \cup \{c_2 > c_1\} \cup \{c_2 > c_1 + c_1\} \cup \ldots \cup \{c_2 > \underbrace{c_1 + \ldots + c_1}_{n \text{ volte}}\}$$

   Ed è facile trovare un modello di T_0, basta infatti considerare come $\mathcal{M}$ gli usuali numeri reali $\mathbb{R}$ con gli assegnamenti necessari per soddisfare T_{arch} e, in più, gli assegnamenti $c_1^{\mathcal{M}} = 1$ e $c_2^{\mathcal{M}} = n + 1$.

   Ma allora per il *Teorema di compattezza* esiste un modello di tutta la teoria T, chiamiamolo $\mathcal{N}$. Basta ora considerare $\mathcal{N}$ come $\mathcal{L}$-struttura "dimenticandoci" degli assegnamenti di c_1 e c_2. $\mathcal{N}$ così definito deve essere campo archimedeo poiché $\mathcal{N} \models T_{arch}$, ma se si considerano i due elementi a cui, in $\mathcal{L}^*$, corrispondevano c_1 e c_2, questi ultimi non rispettano la regola di arichimedeicità.

   Assurdo.

2. *Se σ è vero in tutti i campi $\mathbb{K}$ tali che $\operatorname{char} \mathbb{K} = 0$, allora esiste un $N \in \mathbb{N}$ tale che per ogni campo finito $\mathbb{F}_p$, con $p > N$ primo, σ è vero in $\mathbb{F}_p$.*

   La tesi seguirà facilmente applicando la teoria degli ultraprodotti. Procediamo per assurdo, e supponiamo dunque che esista un σ vero in ogni campo di caratteristica 0 ma falso in infiniti $\mathbb{F}_p$ [1]. Consideriamo dunque

[1] Qui abbiamo usato che, se $|A| = \aleph_0$, allora $B \subseteq A$ è cofinale se e solo se è infinito.

$$L = \{p \in P \colon \mathbb{F}_p \not\models \sigma\}$$

Dove P è l'insieme dei primi. Sia dunque L infinito.

Consideriamo ora il seguente filtro

$$\mathcal{F} = \{X \subseteq P \colon |L \cap X^c| < +\infty\}$$

Grazie al *lemma degli ultrafiltri*, $\mathcal{F}$ si estende ad un ultrafiltro $\mathcal{U}$. Si noti che $\mathcal{U}$ non può essere principale, poiché per ogni primo p si ha $\{p\}^c \in \mathcal{U}$. Ma allora basta considerare

$$\prod_{p \in P} \mathbb{F}_p \Big/ \mathcal{U} = \mathcal{M}$$

Infatti per quanto già visto a lezione, dal momento che $\mathcal{U}$ è ultrafiltro principale, $\mathcal{M}$ è un campo di caratteristica 0, ma $L = \{p \in P \colon \mathbb{F}_p \not\models \sigma\} \in \mathcal{F} \subseteq \mathcal{U}$, e dunque, per il *Teorema di Los*, $\mathcal{M} \not\models \sigma$. Ma questo è assurdo perché, per ipotesi, se $\mathcal{M}$ è modello della teoria dei campi a caratteristica 0, allora $\mathcal{M} \models \sigma$.

Corollario: Non esiste una teoria T di cardinalità finita tale che $\mathcal{M}$ è modello di T se e solo se $\mathcal{M}$ è campo a caratteristica 0. Basta infatti notare che se $T = \{\sigma_1; \ldots; \sigma_k\}$, deve esistere $1 \leq i \leq n$ tale che $|\{p \in P \colon \mathbb{F}_p \not\models \sigma_i\}| = +\infty$; ripetendo il ragionamento precedente si ottiene la tesi.

Esercizi di logica

Naturali non standard

Ludovico Battista

In questa raccolta di esercizi prenderemo in considerazione dei modelli non standard dell'aritmetica di Peano. Elenchiamo qualche notazione:

- Se $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$, denotiamo con
$$\mathbb{N}_{\mathcal{M}} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{s^{(n)}(\underline{0})\}$$
- Definiamo su $\mathcal{M}$ una relazione: diciamo che $x < y$ se e solo se $\exists z \ x + s(z) = y$.

Esercizi:

1. *Se* $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ *allora la relazione "$<$" sopra definita è una relazione di ordine totale.*

   Dobbiamo verificare che $<$ soddisfa i tre assiomi:

   - $\forall x \ \neg(x < x)$
     Sia $\varphi(x) = \neg(x < x)$. Per la neutralità di $\underline{0}$ e per la non suriettività della somma, $\mathcal{M} \models \varphi(\underline{0})$. Inoltre vale la catena di implicazioni:
     $$\varphi(x) \Leftrightarrow \forall z \ x + s(z) \neq x \Leftrightarrow \forall z \ s(x + s(z)) \neq s(x)$$
     $$\Leftrightarrow \forall z \ s(x) + s(z) \neq s(x) \Leftrightarrow \varphi(s(x))$$
     Dunque per uno degli assiomi di induzione (quello relativo a φ) vale $\forall x \varphi(x)$.
   - $\forall x \forall y((x \neq y) \to (x < y \vee y < x))$
     Sia $\varphi(x) = \forall y((x \neq y) \to (x < y \vee y < x))$. Per la suriettività di s su $M \setminus \{\underline{0}\}$ e per la neutralità di $\underline{0}$, vale $\varphi(\underline{0})$.
     Vogliamo ora dimostrare $\varphi(x) \to \varphi(s(x))$. Se dunque $\varphi(x)$ è vera abbiamo 3 possibilità:
     - $y = x$, allora $y + s(\underline{0}) = s(x)$, da cui $y < s(x)$.
     - $y < x$, allora per un certo z_0 vale $y + s(z_0) = x$. Ma allolra vale $\exists z \ y + s(z) = s(x)$, basta considerare $z = s(z_0)$.

- $x < y$, allora ho due possibilità:
  * $x + s(\underline{0}) = y$ allora $y = s(x)$.
  * $x+s(z_0) = y$ per qualche z_0 diverso da $\underline{0}$. Per suriettività di s su $M \setminus \{\underline{0}\}$ esiste un certo z_1 tale che $s(z_1) = z_0$. Allora $x + s(s(z_1)) = y$, allora $s(x) + s(z_1) = y$.

  Dunque vale $\forall x \varphi(x)$.

- $\forall x \forall y \forall z((x < y \land y < z) \to x < z)$
  Vale

$$(x + s(a) = y) \land (y + s(b) = z) \Rightarrow x + s(a) + s(b) = z$$

$$\Rightarrow x + s(a + s(b)) = z \Rightarrow x < z.$$

2. *$\mathcal{M}$ ha un ordine discreto.*

   Premettiamo il seguente lemma:

   Lemma 1. PA $\models (\forall x \forall y \ ((x + y = x) \to y = \underline{0}))$

   Proof. Basta notare che, chiamata $\varphi(x) = \forall y \ ((x + y = x) \to y = \underline{0})$, vale $\varphi(\underline{0})$ e vale il passo induttivo poiché

$$s(x) + y = s(x) \Rightarrow s(x + y) = s(x) \Rightarrow x + y = x \Rightarrow y = \underline{0}$$

□

   Ipotizziamo ora che esistano $m, z \in M$ tali che $m < z \land z < s(m)$. Allora vale, per certi $a, b \in M$,

$$m + s(a) = z \land z + s(b) = s(m) \Rightarrow m + s(a) + s(b) = s(m)$$
$$\Rightarrow m + s(a + s(b)) = s(m) \Rightarrow m + s(a + b) = m$$

   ma allora, per il lemma, $s(a + b) = \underline{0}$. Assurdo.

3. *$\mathbb{N}_{\mathcal{M}}$ è segmento iniziale di M.*

   Se per assurdo esistessero $n \in \mathbb{N}_{\mathcal{M}}$ e $m \in M \setminus \mathbb{N}_{\mathcal{M}}$ tale che $m < n$, si avrebbe, dal momento che M ha ordine discreto e che $n = s^{(n)}(\underline{0})$, che $m < \underline{0}$.

   Ma allora esiste un certo z_0 tale che $m + s(z_0) = \underline{0}$. Ma allora $s(m + z_0) = \underline{0}$, il che è assurdo.

4. *(Overspill) Sia* $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ *con* $\mathcal{M}$ *non-standard. Se* φ *è una formula sull'opportuno linguaggio e per infiniti* $n \in \mathbb{N}_{\mathcal{M}}$ *vale* $\mathcal{M} \models \varphi(x)[{}^{n}\!/_{x}]$*, allora esiste un* $m \in M \smallsetminus \mathbb{N}_{\mathcal{M}}$ *tale che* $\mathcal{M} \models \varphi(x)[{}^{m}\!/_{x}]$.

   Ipotizziamo per assurdo che esista una φ tale che per infiniti $n \in \mathbb{N}_{\mathcal{M}}$ valga $\mathcal{M} \models \varphi(x)[{}^{n}\!/_{x}]$, ma non esista un $m \in M \smallsetminus \mathbb{N}_{\mathcal{M}}$ tale che $\mathcal{M} \models \varphi(x)[{}^{m}\!/_{x}]$.

   Consideriamo $\psi(x) = \exists y\ (x < y \wedge \varphi(y))$. Notiamo che vale $\psi(\underline{0})$. Dimostriamo ora che vale

$$\forall x\ (\psi(x) \rightarrow \psi(s(x)))$$

   Infatti $\mathcal{M} \models \psi(x) \rightarrow \psi(s(x))[{}^{m}\!/_{x}]$ per ogni $m \in M \smallsetminus \mathbb{N}_{\mathcal{M}}$ poiché $\psi(m)$ è falso, e $\mathcal{M} \models \psi(x) \rightarrow \psi(s(x))[{}^{n}\!/_{x}]$ per ogni $n \in \mathbb{N}_{\mathcal{M}}$ poiché $\varphi(n)$ è vero per infiniti n.

   Ma allora per uno degli assiomi di induzione $\mathcal{M} \models \forall x \psi(x)$, e dunque, preso un qualsiasi $m_0 \in M \smallsetminus \mathbb{N}_{\mathcal{M}}$, vale $\psi(m_0)$. Ma questo è assurdo perché $\varphi(m)$ era falso per ogni m non naturale.

   In particolare con la stessa dimostrazione si dimostra che per *infiniti* $m \in M \smallsetminus \mathbb{N}_{\mathcal{M}}$ vale $\mathcal{M} \models \varphi(x)[{}^{m}\!/_{x}]$.

5. *Sia* $\mathcal{M} \models \mathrm{PA}$ *con* $\mathcal{M}$ *non standard. Allora non esiste una formula* φ *tale che* $\mathcal{M} \models \varphi(x)[{}^{n}\!/_{x}] \Leftrightarrow n \in \mathbb{N}_{\mathcal{M}}$.

   La proposizione è un'immediata conseguenza dell'esercizio precedente.